

**Teorema 1.** Funkcija  $z = \varphi(x, y)$  je rješenje jednačine (1) onda i samo onda kada je  $\varphi(x, y) = C$  prvi integral sistema karakteristika (4).  
 Dokaz izvedimo samo u jednom smjeru. Neka je  $\varphi(x, y) = C$  prvi integral sistema karakteristika (4). Tada je  $d\varphi(x, y) = 0$ , tj.  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} x' + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' = 0$ . Kako je  $x' = P(x, y)$  i  $y' = Q(x, y)$ , to je  $P(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$ , tj. funkcija  $z = \varphi(x, y)$  je rješenje jednačine (1).

**Teorema 2.** Ako je  $\varphi(x, y) = C$  prvi integral sistema karakteristika (4), tada je proizvoljno rješenje jednačine (1) dato formulom  $z = f(\varphi(x, y))$ , gdje je  $f$  proizvoljna neprekidno-diferencijabilna funkcija.

**Primjer 2.** Riješiti jednačinu  $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ .

Za datu jednačinu sistem karakteristika je  $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$ , ili u simetričnom obliku  $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$ .

Dalje je  $\ln|x| = \ln|y| - \ln C$ , odnosno  $\frac{y}{x} = C$ , gdje je  $C$  konstanta. Slijedi,  $\frac{y}{x} = C$  je prvi integral sistema karakteristika date jednačine. Saglasno teoremi 2, proizvoljno rješenje date jednačine je funkcija  $z = f\left(\frac{y}{x}\right)$ , gdje je  $f$  proizvoljna neprekidno-diferencijabilna funkcija.

Sada razmotrimo jednačinu (3). Njeno rješenje zapišimo u (implicitnom) obliku

$$v(x, y, z) = 0. \quad (8)$$

Kako je  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial z}}$  i  $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial v}{\partial y}}{\frac{\partial v}{\partial z}}$ , to poslije zamjene u jednačinu (3) dobijamo

homogenu linearnu jednačinu

$$P(x, y, z) \frac{\partial v}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial v}{\partial y} + R(x, y, z) \frac{\partial v}{\partial z} = 0. \quad (9)$$

Dobili smo homogenu linearnu PDJ prvog reda u kojoj je nepoznata funkcija  $v = v(x, y, z)$ .

Jednačina (9) rješava se na sličan način kao i jednačina (1). U početku se napiše sistem karakteristika jednačine (9):